

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА СТРУКТУРИЗАЦИИ НАНОЧАСТИЦ Ag-Cu

А.А. Череповская, Д.А. Рыжкова

ФГБОУ ВО «Хакасский государственный университет имени Н.Ф. Катанова»

655017, Россия, Республика Хакасия, Абакан, просп. Ленина, 90

bashkova.daria@yandex.ru

DOI: 10.26456/pcascnn/2023.15.614

Аннотация: В представленной работе произведено компьютерное моделирование процессов формирования внутреннего строения плазмонных наночастиц *Ag-Cu*. Для этого методом молекулярной динамики на основе потенциала сильной связи была произведена имитация кристаллизации наночастиц *Ag-Cu* диаметром 2,0-8,0 нм с атомарным содержанием меди в пределах от 10 до 50%. Для отвода термической энергии был использован термостат Андерсена с тремя различными скоростями охлаждения $\Delta T/\Delta t = 30 \cdot 10^{11}$, $12 \cdot 10^{11}$, $5 \cdot 10^{11}$ К/с. Возникающие при этом возможные структурные переходы определялись при помощи функции радиального распределения и изменения потенциальной энергии. Для определения наиболее устойчивого кластерного строения был взят ансамбль наночастиц одинакового размера. Далее при помощи визуализаторов OVITO и xmakemol находилась реальная внешняя форма и структура изучаемых наночастиц. В ходе проведенного моделирования было найдено, что при малых уровнях легирования медью в наночастицах *Ag-Cu* возможно образование пятичастичной симметрии и были зафиксированы условия возникновения данного эффекта. Также было определено, что $D = 8,0$ нм для *Ag-Cu* наночастиц является тем размерным пределом, начиная с которого проявляется макроскопический эффект стабилизации ГЦК строения эвтектического сплава при условии очень быстрой закалки образца.

Ключевые слова: нанокластеры, серебро, медь, кристаллизация, структура, компьютерное моделирование, сильная связь.

1. Введение

Бинарные наночастицы (НЧ) обладают более широким спектром интересных свойств, чем НЧ чистых металлов [1]. Так наносплавы могут иметь большое разнообразие геометрических форм и моделей сегрегации (химического упорядочения) как смешанных, так и фазово-разделенных. Среди НЧ с предельно возможным фазовым разделением можно выделить структуры «ядро-оболочка», в которых ядро одного атомного сорта покрыто оболочкой второго вида, и структуры типа Януса, когда металлы разделяются в двух половинах НЧ. Модели сегрегации реальных систем могут иметь промежуточные черты между этими крайними типами.

Другим интересным моментом считается возможность тонкой настройки плазмонных свойств таких НЧ не только путем целенаправленного изменения их размера или формы, но и целевого химического состава. Также одной из возможностей контроля различных свойств, возникающих при изучении данных систем, является их структурные характеристики, представляющие собой основу для более

глубокого понимания физико-химических особенностей поведения [2, 3].

В области наносплавов $Ag-Cu$ является одной из широко изучаемых в экспериментах и расчетах систем. Так НЧ $Ag-Cu$ являются лучшими катализаторами реакций восстановления кислорода [4], чем соответствующие чистые НЧ, также $Ag-Cu$ НЧ находят применение в качестве легкоплавких припоев [5] и т.д. Недавние эксперименты и расчеты [1] показали, что в модельных НЧ $Ag-Cu$ химическое упорядочение явно зависит от целевого состава. Для композиций с большим содержанием Ag , предпочтительным вариантом является ядро-оболочечная структура со смещенным центром. В этом образце ядро Cu асимметрично размещается в НЧ, покрытой с одной стороны очень тонким слоем Ag , что часто называется морфологией квази-Януса.

Морфологии Януса и квази-Януса являются общими для различных бинарных металлических систем, однако прогнозируемым исключением из этого поведения оказываются икосаэдрические кластеры Ag сплавов вследствие особого характера сил межатомного взаимодействия. Более того в некоторых работах было показано, что НЧ $Ag-Cu$ наблюдаемые в газовой фазе представляют собой именно различные некристаллические структуры, в основном относящиеся к икосаэдрическому типу с химическим упорядочением ядро-оболочка [6].

Поэтому целью данной работы стало исследование методами компьютерного моделирования процессов формирования внутреннего строения НЧ сплава $Ag-Cu$ в зависимости от целевого химического состава, размера и интенсивности термического воздействия.

2. Модельная система

На наш взгляд, наиболее адекватной методикой исследования описанных выше процессов может стать молекулярно-динамическое (МД) моделирование, в основе которого лежит расчет классических (ньютоновских) траекторий движения объекта в фазовом пространстве координат и импульсов его атомов. Этот метод позволяет достаточно точно определить структурные и термодинамические свойства кластеров, а также проследить динамику атомов НЧ при изменении различных внешних факторов, таких как температура, давление и т.д.

Для моделирования термического воздействия на $Ag-Cu$ НЧ МД методом была использована компьютерная программа MDNTP, разработанная Dr. Ralf Meyer, University Duisburg Germany. Силы межатомного взаимодействия вычислялись с использованием потенциала сильной связи TB-SMA (tight-binding second moment approximation) на основе параметров, рассчитанных в [7]. Данный потенциал основан на

предположении, что большая группа свойств переходных металлов и их сплавов может быть полностью определена из плотности состояний внешних d -электронов.

Компьютерный анализ протекающих процессов проводился в микроканоническом NVE ансамбле. Температура определялась посредством средней кинетической энергии атомов, которая рассчитывалась на основе скоростного алгоритма Верле с шагом по времени $h=1$ фс. В качестве начальных объектов были использованы сферические кластеры, получаемые при вырезании из идеальной кристаллической решетки Ag , в которых часть атомов серебра была случайным образом заменена атомами меди в интересующем нас целевом процентном соотношении.

На первом этапе моделируемые системы были плавно нагреты до 1200 К и выдержаны при этой температуре в течении 1,0 нс для полного исчезновения остатков кристаллического строения. Верхний предел в 1200 К является достаточным, для того, чтобы расплавить моделируемые частицы, так как температура плавления для кластеров Ag значительно понижается с уменьшением размера частицы по сравнению с объемным материалом ($T_m = 1235,1$ К).

На втором этапе с использованием термостата Андерсена была произведена процедура плавного охлаждения $Ag-Cu$ НЧ к комнатной температуре с тремя различными темпами отвода термической энергии. Возникающие при этом возможные структурные переходы определялись при помощи функции радиального распределения и изменения потенциальной энергии. Для определения наиболее устойчивого кластерного строения был взят ансамбль НЧ одинакового размера. После этого при помощи визуализаторов OVITO [11] и xmakemol [12] находился реальный внешний вид и структура изучаемых НЧ.

3. Результаты и обсуждение

Для анализа были выбраны бинарные НЧ $Ag-Cu$ диаметром $2,0 \leq D \leq 8,0$ нм с процентным содержанием атомов меди в них в пределах 10-50%. Так как имитировалась методика вакуумно-термического формирования $Ag-Cu$ НЧ [8, 9], то первичные НЧ были в расплавленном (аморфном) состоянии с наличием максимально возможной сферической формы. Далее эти первичные НЧ подвергались процедуре охлаждения к комнатной температуре ($T=300$ К) с разным темпом отвода термической энергии $\Delta T/\Delta t = 30 \cdot 10^{11}$, $12 \cdot 10^{11}$ и $5 \cdot 10^{11}$ К/с, соответствующим времени охлаждения $\tau = 0,5$; 1,5 и 2,5 нс.

Полученные результаты оказались достаточно неожиданными по отношению к макроскопическим образцам. При очень быстром охлаждении эвтектическое превращение в объемных сплавах $Ag-Cu$ может быть подавлено, и фиксируется только одна фаза – твердый раствор с гранцентрированной кубической решеткой. В нашем случае, независимо от процентного содержания атомов меди (10-50%) в бинарных НЧ $Ag-Cu$ и их размера ($2,0 \leq D \leq 8,0$ нм) при двух наибольших скоростях охлаждения ($\Delta T / \Delta t = 30 \cdot 10^{11}$ и $12 \cdot 10^{11}$ К/с) всегда фиксировались НЧ только с разупорядоченным строением (см. рис. 1). Анализ «мгновенных» снимков НЧ на конечной стадии термической эволюции ($T = 300$ К) показывает наличие нескольких важных тенденций:

1. Атомы Ag выдавливаются из центра $Ag-Cu$ НЧ, преимущественно к ее поверхности.

2. Четко сформированного медного ядра в центре $Ag-Cu$ НЧ не наблюдается. Атомы Cu распределены в пределах достаточно широкого объема, образуя в нем смесь атомов различного сорта.

3. Из-за отсутствия явного ядро-оболочечного вида атомы Ag и атомы Cu не могут образовать собственные кристаллические подрешетки, из-за чего внутреннее строение бинарных $Ag-Cu$ НЧ, при высоких темпах отвода термической энергии является аморфноподобным.

4. НЧ сплава $Ag-Cu$, в пределах рассмотренных размеров ($2,0 \leq D \leq 8,0$ нм), сохраняют первоначально заданную сферическую форму.

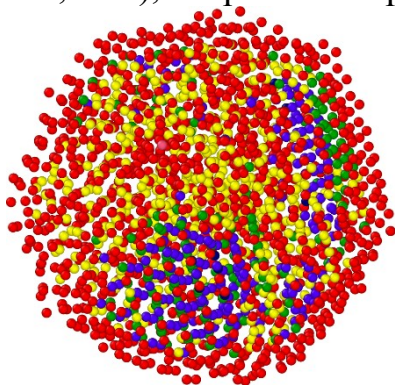


Рис. 1. Изображение кластера $Ag_{90}Cu_{10}$ диаметром 4,0 нм при скорости охлаждения $\Delta T / \Delta t = 30 \cdot 10^{11}$ К/с. Различными цветами показаны атомы, окружение которых соответствует определенному строению: синий – ГЦК; зеленый – ГПУ; желтый – аморфному; красный – атомы с координационным числом < 12 .

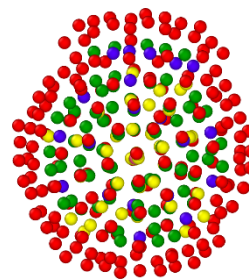


Рис. 2. Изображение кластера $Ag_{90}Cu_{10}$ диаметром 2,0 нм с икосаэдрической структурой. Цветовые обозначения соответствуют рис. 1.

Перейдем теперь к наиболее интересным результатам, полученным

для скорости охлаждения $\Delta T / \Delta t = 5 \cdot 10^{11}$ К/с. При относительно большом проценте содержания атомов меди ($\geq 20\%$) в бинарных НЧ $Ag-Cu$, внешний и внутренний вид НЧ полностью идентичен рассмотренным выше случаям более высоких темпов отвода термической энергии. На конечном этапе фиксируется сферическая НЧ с отсутствием кристаллографически упорядоченного расположения атомов. Но если рассмотреть случай минимального легирования НЧ серебра атомами меди ($\approx 10\%$), то ситуация значительно изменяется, причем, имеется явно выраженный размерный эффект. В [6] было найдено, что очень низкие уровни легирования медью (несколько процентов) могут вызывать переход $Ag-Cu$ НЧ диаметром $D = 3-5$ нм от ГЦК к икосаэдрическому (Ih) строению.

Похожая тенденция была обнаружена и подтверждена при нашем МД исследовании, правда с некоторыми ограничениями. Анализ результатов начнем с ансамбля $Ag-Cu$ НЧ диаметра $D = 2,0$ нм. Здесь даже при минимальной скорости охлаждения $\Delta T / \Delta t = 5 \cdot 10^{11}$ К/с около 70% НЧ на конечном этапе моделирования характеризуются разупорядоченным строением. Оставшиеся 30% НЧ действительно обладают икосаэдрической структурой (см. рис. 2). То есть при малых уровнях легирования медью в НЧ $Ag-Cu$ возможно образование пятичастичной симметрии, но только при достаточно медленном протекании процесса охлаждения. Переход ГЦК $\rightarrow Ih$ обнаружен не был, так как структурирование НЧ происходило из расплава.

Рассмотренный нами ансамбль был меньше размеров, изученных в [6], и это могло внести какие-то особенности в результаты проведенного МД моделирования. Поэтому далее для исследования был взят ансамбль НЧ $Ag-Cu$ диаметром $D = 4,0$ нм. Для него при комнатной температуре оказалось характерно резкое сокращения процента НЧ находящихся в аморфном или квазиаморфном состоянии. Если при $D = 2,0$ нм таких частиц было порядка 70%, то при $D = 4,0$ нм уже около 40%. Из частиц, обладавших кристаллическим строением, примерно 30% было с пятичастичной симметрией (Ih, Dh), оставшиеся обладали ГЦК строением, характерным для очень быстро охлажденных макроскопических образцов сплава $Ag-Cu$.

Подобная тенденция прослеживается и при увеличении диаметра изучаемых бинарных НЧ. Так при $D = 6,0$ нм и скорости охлаждения $\Delta T / \Delta t = 5 \cdot 10^{11}$ К/с $Ag-Cu$ НЧ в разупорядоченном состоянии зафиксировано не было. Моделируемые НЧ успевали реорганизовать свое внутреннее строение в направлении формирования либо икосаэдрической политипной модификации ($\approx 20\%$), либо в направлении ГЦК фазы.

Последний изученный ансамбль бинарных НЧ $Ag-Cu$ имел диаметр $D=8,0$ нм и в нем, при скорости охлаждения $\Delta T/\Delta t = 5 \cdot 10^{11}$ К/с, все НЧ на конечной стадии моделирования ($T=300$ К) также обладали не эвтектическим, а ГЦК строением. Таким образом, можно констатировать, что $D=8,0$ нм для $Ag-Cu$ НЧ является тем размерным пределом, начиная с которого проявляется макроскопический эффект стабилизации не свойственного для эвтектического сплава ГЦК строения при условии очень быстрой закалки образца. Можно только предположить, что с дальнейшим ростом диаметра $Ag-Cu$ НЧ возможно появление данного эффекта и при больших скоростях отвода тепловой энергии (например, при скорости $\Delta T/\Delta t = 12 \cdot 10^{11}$ К/с), но доказательство этой гипотезы лежит за пределами технических возможностей проводимого МД моделирования, так как потребует неоправданно много расчетного времени.

4. Заключение

По результатам компьютерного анализа было найдено, что использование $Ag-Cu$ НЧ диаметром до 8,0 нм включительно, независимо от целевого химического состава и темпов отвода термической энергии, позволяет сохранить сферическую форму НЧ, в отличие от синтезированных НЧ большего размера ($D \approx 30$ нм), где экспериментально [10] наблюдались частицы очень сложной формы без наличия какой либо явной симметрии. Кроме этого в работе было показано, что модельные частицы демонстрировали на конечной стадии термической эволюции достаточно широкое распределение атомов Cu в центральной области бинарной НЧ с частичным выдавливанием атомов Ag преимущественно к ее поверхности. Это также достаточно сильно контрастирует с результатами [10], где у НЧ большего линейного размера четко фиксировалось соединение условно серебрянных и медных частей единой $Ag-Cu$ НЧ. Отметим, что вытеснение атомов Ag к поверхности способствует защите атомов Cu от атмосферного окисления, что приводит к сохранению плазмонных эффектов.

Помимо этого в ходе проведенного моделирования найдено, что при малых уровнях легирования медью в НЧ $Ag-Cu$ возможно образование пятичастичной симметрии и были зафиксированы условия возникновения данного эффекта. Также определено, что $D=8,0$ нм для $Ag-Cu$ НЧ является тем размерным пределом, начиная с которого проявляется макроскопический эффект стабилизации ГЦК строения эвтектического сплава при условии очень быстрой закалки образца.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 23-29-10011, <https://rscf.ru/project/23-29-10011/>) при паритетной

финансовой поддержке Правительства Республики Хакасия.

Библиографический список:

1. **Bochicchio, D.** Structures and segregation patterns of Ag-Cu and Ag-Ni nanoalloys adsorbed on MgO(001) / D. Bochicchio, R. Ferrando, E. Panizon, G. Rossi // *Journal of Physics: Condensed Matter*. – 2016. – V. 28. – № 5. – Art. № 064005. – 13 p. DOI: 10.1088/0953-8984/28/6/064005.
2. **Araujo, T.P.** Understanding plasmonic catalysis with controlled nanomaterials based on catalytic and plasmonic metals / T.P. Araujo, J. Quiroz, E.C.M. Barbosa, P.H.C. Camargo // *Current Opinion in Colloid & Interface Science*. – 2019. – V. 39. – P. 110-122. DOI: 10.1016/j.cocis.2019.01.014.
3. **Qian, K.** Surface plasmon-driven water reduction: gold nanoparticle size matters / K. Qian, B.C. Sweeny, A.C. Johnston-Peck et. al. // *Journal of the American Chemical Society*. – 2014. – V. 136. – I. 28. – P. 9842-9845. DOI: 10.1021/ja504097v.
4. **da Silva, A.G.M.** The fault in their shapes: investigating the surface-plasmon-resonance-mediated catalytic activities of silver quasi-spheres, cubes, triangular prisms, and wires / A.G.M. da Silva, T.S. Rodrigues, J. Wang et. al. // *Langmuir*. – 2015. – V. 31. – I. 37. – P. 10272-10278. DOI: 10.1021/acs.langmuir.5b02838.
5. **Kim, S.J.** Fabrication of conductive interconnects by Ag migration in Cu–Ag coreshell nanoparticles / S.J. Kim, E. A. Stach, C. A. Handwerker // *Applied Physics Letters*. – 2010. – V. 96. – I. 14. – P. 144101-1-144101-3. DOI: 10.1063/1.3364132.
6. **Panizon, E.** Tuning the structure of nanoparticles by small concentrations of impurities / E. Panizon, D. Bochicchio, G. Rossi, R. Ferrando // *Chemistry of Materials*. – 2014. – V. 26. – I. 11. – P. 3354-3356. DOI: 10.1021/cm501001f.
7. **Rapallo, A.** Global optimization of bimetallic cluster structures. I. Size-mismatched Ag-Cu, Ag-Ni, and Au-Cu systems / A. Rapallo, G. Rossi, R. Ferrando et al. // *The Journal of Chemical Physics*. – 2005. – V. 122. – I. 19. – P. 194308-1-194308-13. DOI: 10.1063/1.1898223.
8. **Gromov, D.G.** Investigation of the early stages of condensation of Ag and Au on the amorphous carbon surface during thermal evaporation under vacuum / D.G. Gromov, L.M. Pavlova, A.I. Savitskii, A.Y. Trifonov // *Physics of the Solid State*. – 2015. – V. 57. – I. 1. – P. 173-180. DOI: 10.1134/S1063783415010126.
9. **Gromov, D.G.** Nucleation and growth of Ag nanoparticles on amorphous carbon surface from vapor phase formed by vacuum evaporation / D.G. Gromov, L.M. Pavlova, A.I. Savitsky, A.Y. Trifonov // *Applied Physics A*. – 2015. – V. 118. – I. 4. – P. 1297-1303. DOI: 10.1007/s00339-014-8834-0.
10. **Dubkov, S.V.** SERS in red spectrum region through array of Ag–Cu composite nanoparticles formed by vacuum-thermal evaporation / S.V. Dubkov, A.I. Savitskiy, A. Yu Trifonov et.al. // *Optical Materials: X*. – 2020. – V. 7. – Art. № 100055. – 9 p. DOI: 10.1016/j.omx.2020.100055.
11. **Stukowski, A.** Visualization and analysis of atomistic simulation data with OVITO – the open visualization tool / A. Stukowski // *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*. – 2010. – V. 18. – I. 1. – P. 015012-1-015012-7. DOI: 10.1088/0965-0393/18/1/015012.
12. XMakeMol - A program for visualizing atomic and molecular systems. – Режим доступа: www.url:https://manpages.ubuntu.com/manpages/bionic/man1/xmakemol.1.html. – 15.05.2023.

References:

1. Bochicchio D., Ferrando R., Panizon E., Rossi G. Structures and segregation patterns of Ag-Cu and Ag-Ni nanoalloys adsorbed on MgO(001), *Journal of Physics: Condensed Matter*, 2016, vol. 28, no. 5, art.no. 064005, 13 p. DOI: 10.1088/0953-8984/28/6/064005.
2. Araujo T.P., Quiroz J., Barbosa E.C.M., Camargo P.H.C. Understanding plasmonic catalysis with controlled nanomaterials based on catalytic and plasmonic metals, *Current Opinion in Colloid & Interface Science*, 2019, vol. 39, pp. 110-122. DOI: 10.1016/j.cocis.2019.01.014.
3. Qian K., Sweeny B.C., Johnston-Peck A.C. et. al. Surface plasmon-driven water reduction: gold nanoparticle size matters, *Journal of the American Chemical Society*, 2014, vol. 136, issue 28, pp. 9842-9845. DOI: 10.1021/ja504097v.
4. da Silva A.G.M., Rodrigues T.S., Wang J. et. al. The fault in their shapes: investigating the surface-plasmon-resonance-mediated catalytic activities of silver quasi-spheres, cubes, triangular prisms, and wires, *Langmuir*, 2015, vol. 31, issue 37, pp. 10272-10278. DOI: 10.1021/acs.langmuir.5b02838.
5. Kim S. J., Stach E. A., Handwerker C. A. Fabrication of conductive interconnects by Ag migration in Cu–Ag coreshell nanoparticles *Applied Physics Letters*, 2010, vol. 96, issue 14, pp. 144101-1-144101-3. DOI: 10.1063/1.3364132.
6. Panizon E., Bochicchio D., Rossi G., Ferrando R. Tuning the structure of nanoparticles by small

- concentrations of impurities, *Chemistry of Materials*, 2014, vol. 26, issue 11, pp. 3354-3356. DOI: 10.1021/cm501001f.
7. Rapallo A., Rossi G., Ferrando R. et al. Global optimization of bimetallic cluster structures. I. Size-mismatched Ag-Cu, Ag-Ni, and Au-Cu systems, *The Journal of Chemical Physics*, 2005, vol. 122, issue 19, pp. 194308-1-194308-13. DOI: 10.1063/1.1898223.
8. Gromov D.G., Pavlova L.M., Savitskii A.I., Trifonov A.Y. Investigation of the early stages of condensation of Ag and Au on the amorphous carbon surface during thermal evaporation under vacuum, *Physics of the Solid State*, 2015, vol. 57, issue 1, pp. 173-180. DOI: 10.1134/S1063783415010126.
9. Gromov D.G., Pavlova L.M., Savitsky A.I., Trifonov A.Y. Nucleation and growth of Ag nanoparticles on amorphous carbon surface from vapor phase formed by vacuum evaporation, *Applied Physics A*, 2015, vol. 118, issue 4, pp. 1297-1303. DOI: 10.1007/s00339-014-8834-0.
10. Dubkov S.V., Savitskiy A.I., Trifonov A.Yu. et al. SERS in red spectrum region through array of Ag-Cu composite nanoparticles formed by vacuum-thermal evaporation, *Optical Materials: X*, 2020, vol. 7, art.no. 100055, 9 p. DOI: 10.1016/j.omx.2020.100055.
11. Stukowski A. Visualization and analysis of atomistic simulation data with OVITO – the open visualization tool, *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, 2010, vol. 18, issue 1, pp. 015012-1-015012-7. DOI: 10.1088/0965-0393/18/1/015012.
12. XMakemol - A program for visualizing atomic and molecular systems. Available at: www.url:https://manpages.ubuntu.com/manpages/bionic/man1/xmakemol.1.html (accessed 15.05.2023).

Original paper

COMPUTER SIMULATION OF STRUCTURING Ag-Cu NANOPARTICLES

A.A. Cherepovskaya, D.A. Ryzhkova
Khakass State University, Abakan, Russia

DOI: 10.26456/pcascnn/2023.15.614

Abstract: In this work, computer simulation of the processes of formation of the internal structure of plasmonic Ag-Cu nanoparticles was carried out. Method of molecular dynamics based on the tight binding potential was used. The crystallization of Ag-Cu nanoparticles with a diameter of 2,0-8,0 nm with an atomic copper content ranging from 10 to 50% was simulated. To remove thermal energy, an Andersen thermostat was used with three different cooling rates $\Delta T/\Delta t = 30 \cdot 10^{11}$, $12 \cdot 10^{11}$, $5 \cdot 10^{11}$ K/s. The possible structural transitions arising in this case were determined using the radial distribution function and the change in potential energy. To determine the most stable cluster structure, an ensemble of nanoparticles of the same size was taken. Then, using the visualizers OVITO and xmakemol, the real appearance and structure of the studied nanoparticles were found. In the course of the simulation, it was found that at low levels of copper doping in Ag-Cu nanoparticles, the formation of five-particle symmetry is possible. The conditions for the occurrence of this effect were fixed. It was also determined that $D = 8,0$ nm for Ag-Cu nanoparticles is the size limit, starting from which the macroscopic effect of stabilizing the fcc structure of the eutectic alloy appears under the condition of very fast sample quenching.

Keywords: nanoclusters, silver, copper, crystallization, structure, computer simulation, tight binding.

Череповская Арина Александровна – студент 5 курса кафедры математики, физики и информационных технологий ФГБОУ ВО «Хакасский государственный университет им. Н.Ф. Катанова»

Рыжкова Дарья Антоновна – аспирант третьего года обучения, старший преподаватель кафедры математики, физики и информационных технологий ФГБОУ ВО «Хакасский государственный университет им. Н.Ф. Катанова»

Arina A. Cherepovskaya – 5th year student, Department of Mathematics, Physics and Information Technology, Katanov Khakass State University

Daria A. Ryzhkova – 3rd year postgraduate student, Senior Lecturer, Department of Mathematics, Physics and Information Technology, Katanov Khakass State University

Поступила в редакцию/received: 01.06.2023; после рецензирования/revised: 20.06.2023; принята/accepted: 25.06.2023.