

ОСОБЕННОСТИ КРИСТАЛЛИЗАЦИИ НАНОКЛАСТЕРОВ СПЛАВА Ag-Au

Ю.Я. Гафнер, Д.А. Рыжкова, С.Л. Гафнер, А.А. Череповская
ФГБОУ ВО «Хакасский государственный университет имени Н.Ф. Катанова»
655017, Россия, Республика Хакасия, Абакан, пр. Ленина, 90
ygafner@khsu.ru

DOI: 10.26456/pcascnn/2023.15.387

Аннотация: При производстве SERS (surface enhanced Raman scattering) подложек используют два основных подхода к формированию массива плазмонных наночастиц: фотолитографию и химические методы, каждый из которых имеет свои преимущества и недостатки. Возможен еще способ термического испарения в вакууме, который и был выбран для анализа методом компьютерного моделирования. Для этого применялась молекулярно-динамическая имитация процессов кристаллизации массива бинарных наночастиц *Ag-Au*, позволяющих плавно регулировать длину волны плазмонного резонанса. Было создано три массива *Ag-Au* НЧ диаметром 2,0; 4,0 и 6,0 нм различного целевого состава от $Ag_{90}Au_{10}$ до $Ag_{50}Au_{50}$, которые подвергались процедуре охлаждения из расплава с различным темпом отвода термической энергии. В ходе моделирования формирования внутреннего строения наночастиц *Ag-Au* были сделаны выводы о зависимости данных процессов от целевого состава, размера и уровня термического воздействия. На основе полученных закономерностей были предложены корректировки технологического процесса создания SERS подложек с использованием бинарных наночастиц *Ag-Au*.

Ключевые слова: нанокластеры, серебро, золото, кристаллизация, структура, компьютерное моделирование, сильная связь.

1. Введение

Хорошо известным способом использования плазмонных наноструктур считается поверхностное комбинационное рассеяние света (surface enhanced Raman scattering–SERS) [1]. При этом увеличение чувствительности SERS структуры может быть достигнуто за счет роста энергии падающей электромагнитной волны благодаря усилению поля вблизи поверхностей наночастиц (НЧ) из-за локализованного плазмонного резонанса. Однако эти особенности поведения металлических НЧ сильно зависят от способа синтеза наноматериалов, поскольку именно он определяет их окончательную форму, размер, внутреннее строение, состав и химическую стабильность. Добавление в НЧ второго металла приводит к существенному изменению ее физико-химических свойств, что выражается и в изменении ее морфологии. Экспериментальные и теоретические данные демонстрируют значительные флуктуации в термодинамике и процессах структурообразования малых нанокластеров даже в случае добавления в них только одного примесного атома. В целом можно сказать, что с точки зрения строения и формы о биметаллических НЧ все же известно сравнительно мало.

Нанокристаллы благородных металлов (*Au*, *Ag*) привлекли большое

научное внимание в нанооптике [2] из-за уникальных характеристик локализованного поверхностного плазмонного резонанса (localized surface plasmon resonance–LSPR), демонстрируя LSPR полосу в видимой области спектра. При этом их коэффициент экстинкции оказался как минимум на три-четыре порядка выше, чем у любой органической молекулы. Следовательно, данные наноматериалы представляют собой привлекательные преобразователи, например, для разработки колориметрических биосенсоров [3].

Бинарные НЧ сплава золота и серебра представляют большой практический интерес в связи с возможностью настройки спектрального положения и амплитуды LSPR путем изменения состава, размера, формы, структуры и диэлектрического окружения НЧ. Корректировка целевого химического состава наносплава открывает дополнительный путь для управления оптоэлектронными свойствами, а также может улучшить практически важные характеристики НЧ. Поскольку система $Ag-Au$ представляет собой ряд непрерывных твердых растворов, появляется возможность плавного изменения положения LSPR максимума в диапазоне длин волн, соответствующих чистому Ag и чистому Au путем выбора процентного соотношения компонентов [4].

Таким образом, целью данной работы было исследование методами компьютерного моделирования процессов формирования внутреннего строения НЧ бинарного сплава $Ag-Au$ в зависимости от их целевого состава, размера и уровня термического воздействия в ходе имитации некоторых методик физического синтеза.

2. Компьютерная модель

Для физически корректного решения поставленной задачи необходимо, прежде всего, определить методику исследования. На наш взгляд наиболее подходящим способом получения интересующей нас информации может стать компьютерное моделирование. Данная методика позволяет варьировать в самых широких пределах целый ряд как внутренних, так и внешних параметров нанокластеров (размер, форма, начальное строение, температуру, темп подвода/отвода термической энергии и т.д.), что дает нам широкий простор для возможных модельных опытов, часто недостижимый при проведении реальных экспериментов. В качестве основы моделирования был выбран метод молекулярной динамики (МД), который является достаточно адекватным с точки зрения определения структур металлических НЧ с интересующим нас размером.

Другим важным моментом моделирования реальных систем является выбор правильной формы межатомного взаимодействия. В представленной работе компьютерное моделирование НЧ $Ag-Au$

проводилось с использованием модифицированного потенциала сильной связи [5], хорошо зарекомендовавшего себя при исследовании внутреннего строения нанокластеров различных химических элементов.

Температура системы определялась посредством средней кинетической энергии атомов, рассчитанной при помощи скоростного алгоритма Верле [6] с шагом по времени 1,0 фс. В качестве начальных объектов были использованы сферические кластеры, получаемые при вырезании из идеальной кристаллической решетки Ag, в которых часть атомов серебра была случайным образом заменена атомами золота в интересующем нас целевом процентном соотношении.

Также важным аспектом моделирования является взаимодействие системы с тепловым резервуаром. Для метода молекулярной динамики естественным является микроканонический NVE ансамбль, для которого постоянной величиной является энергия. Для подобных целей был предложен и развит целый ряд специальных методик, и, в частности, термостат Андерсена, который использовался нами при вычислениях. Моделирование проводилось с использованием компьютерной программы MDNTP, разработанной Dr. Ralf Meyer, University Duisburg Germany. Далее при помощи визуализаторов OVITO [7] и xmakemol [8] определяется реальный внешний вид и структура изучаемых НЧ.

3. Результаты и обсуждение

При подготовке SERS подложек, существует два основных подхода. Первый является наиболее точным и предполагает использование методов фотолитографии. Он позволяет формировать высокоупорядоченные нанобъекты расположенные на поверхности с заданными одинаковыми размерами НЧ и определенными расстояниями между ними. Второй подход заключается в формировании НЧ из растворов химическими методами, что является самый простым и дешевым способом. Данный метод позволяет достаточно хорошо контролировать размер частиц, но перенос этих частиц на поверхность твердого тела с образованием упорядоченного массива плохо воспроизводим [1]. Однако упорядоченные массивы НЧ на SERS подложках можно формировать и физическим методом термического испарения в вакууме. Частицы в таких массивах имеют разный диаметр, но их распределение является гауссовым, при этом средний размер частиц хорошо контролируется и воспроизводится [1,4] также как и расстояние между ними.

Как было показано в [4], начальный конденсат в этом случае представлял собой массив небольших отдельно стоящих частиц довольно сложной формы, не являющейся сферической. Далее полученные образцы были подвергнуты отжигу в вакууме при остаточном давлении $1 \cdot 10^{-5}$ торр в

течение 60 мин, что привело к трансформации массива частиц произвольного внешнего вида в массив НЧ с формой, близкой к сферической [4], который затем и охлаждался до комнатной температуры.

Для компьютерной имитации указанных выше процессов нами были созданы три первичных массива $Ag-Au$ НЧ с идеальным ГЦК строением диаметром 2,0; 4,0 и 6,0 нм различного целевого состава от $Ag_{90}Au_{10}$ до $Ag_{50}Au_{50}$. Затем НЧ бинарного соединения $Ag-Au$ были нагреты с целью полного разрушения дальнего порядка в них до температур порядка $T = 1500$ К, что исключало наличие остаточных зародышей кристаллической фазы в НЧ. После процесса формирования массива $Ag-Au$ НЧ с первичным аморфным строением он подвергался процедуре плавного охлаждения с регулируемым темпом отвода тепловой энергии до температуры 300 К.

Проведенное моделирование показало, что даже при незначительном добавлении в Ag кластер примеси золота, результат может достаточно сильно отличаться от случая химически чистого металла. Добавление атомов золота в Ag НЧ при времени охлаждения из расплава $\tau = 2,5$ нс повлияло только на самые малые $Ag-Au$ НЧ диаметром $D = 2,0$ нм, где с ростом процентного содержания атомов золота наблюдался аналогичный рост вероятности появления аморфной фазы, доходящий до своего максимального значения в 60-70%. При $D = 4,0$ и 6,0 нм аналогично Ag НЧ [9] аморфная фаза при этой скорости отвода тепловой энергии не фиксировалась, несмотря на то, целевой состав менялся до своего максимального значения $Ag_{50}Au_{50}$.

При времени охлаждения $\tau = 0,5$ нс влияние добавки второго химического элемента оказалось уже более существенным. Так в случае Ag НЧ с $D = 2,0$ нм аморфная фаза наблюдалась в 30%, а для бинарной НЧ $Ag-Au$ в 50–100% модельных опытов, плавно увеличивая вероятность своего появления с возрастанием процентного содержания атомов золота. С ростом размера $Ag-Au$ НЧ тенденция сохранялась, но уже с ростом минимального процента фиксации аморфной фазы. Т.е. при такой высокой скорости отвода тепловой энергии добавление в Ag НЧ атомов золота привело к практически линейному увеличению вероятности появления аморфного строения.

Таким образом, можно прийти к выводу, что внедрение атомов золота в Ag НЧ оказывает явное дестабилизирующее воздействие на создание упорядоченного внутреннего строения в бинарной НЧ $Ag-Au$ [10, 11]. Но так как атомарная перестройка имеет здесь диффузионный характер, сильно зависящий от температуры, то в случае проведенного

нами моделирования кристаллизации бинарных частиц $Ag-Au$ из расплава времени охлаждения может не хватить для завершения данного процесса из-за чего и наблюдается «заморозка» аморфной фазы. Так же очевидно, что чем больше процент атомов золота, тем более вероятным будет именно разупорядоченное состояние, по крайней мере, при высоком темпе отвода термической энергии. Следовательно, для того, чтобы $Ag-Au$ НЧ на SERS подложке были в упорядоченном кристаллографическом состоянии при любом целевом составе необходимо использовать НЧ с диаметром $D > 2-3$ нм и добиваться медленного охлаждения системы. Первое условие можно выполнить регулировкой самого процесса вакуумно-термического испарения прекурсоров, меняя расстояние от тигля до мишени и скорости испарения подвесок Ag и Au , а второе – использованием прогреваемой во время кристаллизации $Ag-Au$ НЧ подложки.

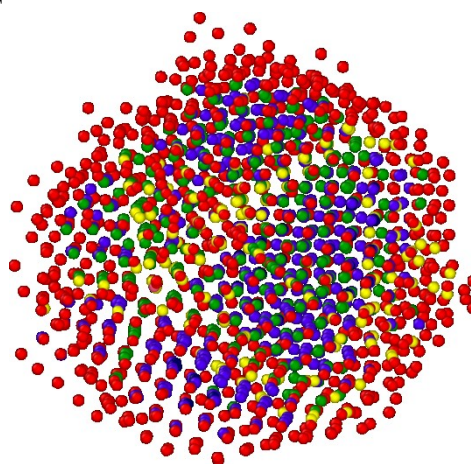
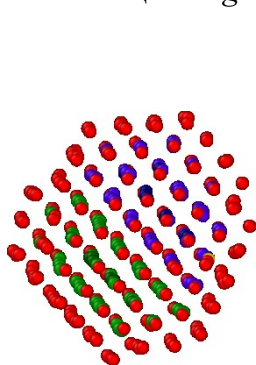


Рис. 1. Изображение кластера химической композицией $Ag_{50}Au_{50}$ с ГЦК строением. МД моделирование.

Рис. 2. Изображение кластера химической композицией $Ag_{90}Au_{10}$ с Ih строением.

Перейдем теперь к вопросу определения вида кристаллического строения бинарных $Ag-Au$ НЧ, получаемых нами при МД моделировании. Анализ внутреннего строения нанокластеров $Ag-Au$ показывает, что предпочтительной кристаллической структурой для диаметра $D = 2,0$ нм является Ih конфигурация, в некоторых случаях с ней конкурирует Dh модификация, а ГЦК/ГПУ морфология (см. рис. 1) встречается заметно реже. Цвет атомов обозначает соответствующую локальную структуру [2].

Более подробно рассматривая характер кристаллических структур, получаемых в ходе моделирования, можно увидеть подтверждение найденной нами ранее закономерности. Так для нанокластеров $Ag-Au$ диаметром $D = 4,0$ нм характерно наличие Ih фазы именно при максимальном времени кристаллизации $\tau = 2,5$ нс или для частиц с малым содержанием золота (целевой состав $Ag_{90}Au_{10}$). При других условиях икосаэдрическое строение в ходе МД экспериментов не фиксировалось.

Таким образом, можно сделать вывод, что рассмотренный диаметр бинарного кластера $Ag-Au$, по всей видимости, лежит в той области размеров, в которой, при условии плавной кристаллизации с высокой скоростью, икосаэдрическая структура перестает быть наиболее стабильной и сменяется Dh или ГЦК строением. В работе [12] был проанализирован набор 923, 1415, 3871, 10179 атомных кластеров золота трех различных структур (икосаэдрической, дефектной икосаэдрической и аморфной), получаемых из расплава кристаллизацией с разными скоростями, и был сделан вывод, что с точки зрения энергетики наиболее стабильной является дефектная икосаэдрическая конфигурация, что можно видеть и у нас на рис. 2. Что касается вероятности суммарного появления $Ag-Au$ НЧ с пятичастичной симметрией ($Ih + Dh$), то оно являлось максимальным при целевом составе $Ag_{90}Au_{10}$ ($\approx 90\%$), уменьшаясь в конечном итоге до 50–60% при составах с наибольшим содержанием атомов золота $Ag_{60}Au_{40}$ и $Ag_{50}Au_{50}$. Соответственно при увеличении содержания атомов Au у нас наблюдался постепенный рост ГЦК/ГПУ фазы с 10% до 50–60%, который являлся лишь следствием сокращения вероятности встретить бинарную НЧ $Ag-Au$ НЧ именно с пятичастичным строением из-за роста возникающих при этом внутренних напряжений, причина которых была указана выше.

4. Заключение

Хорошо известно, что золото и серебро взаимно растворяются друг в друге в любых пропорциях, формируя непрерывный ряд твердых растворов. При этом растворение примеси в металле (Au в Ag или Ag в Au) локально деформирует кристаллическую решетку и вызывает в ней нарушение периодичности, что в случае наноразмеров может приводить к самому различному виду внешней формы и внутреннего строения НЧ. Данные процессы могут приводить к сокращению длины свободного пробега электрона и, как следствие, к увеличению частоты его рассеяния, что влияет на интенсивность SERS эффекта по сравнению с чистыми элементами. Но в тоже время бинарные НЧ $Ag-Au$ дают и возможность настройки спектрального положения и амплитуды LSPR путем изменения целевого состава, размера, формы и структуры.

Исследование выполнено за счет гранта Министерства образования и науки Республики Хакасия (соглашение №92 от 13.12.2022).

Библиографический список:

1. **Gromov, D.G.** Optimization of nanostructures based on Au, Ag, Au-Ag nanoparticles formed by thermal evaporation in vacuum for SERS applications / D.G. Gromov, S.V. Dubkov, A.I. Savitskiy et. al. // Applied

- Surface Science. – 2019. – V. 489. – P. 701-707. DOI: 10.1016/j.apsusc.2019.05.286.
2. **Рыжкова, Д.А.** Термическая стабильность строения малых ГЦК-магических размеров кластеров серебра с начальной аморфной конфигурацией / Д.А. Рыжкова, Ю.Я. Гафнер // Физико-химические аспекты изучения кластеров, наноструктур и наноматериалов. – 2020. – Вып. 12. – С. 486-492. DOI: 10.26456/pcascnn/2020.12.486.
3. **Retout, M.** Synthesis of ultrastable and bioconjugable Ag, Au, and bimetallic Ag-Au nanoparticles coated with calix[4]arenes / M. Retout, I. Jabin, G. Bruylants / ACS Omega. – 2021. – V. 6. – I. 30. – P. 19675-19684. DOI: 10.1021/acsomega.1c02327.
4. **Громов, Д.Г.** Оптическая спектроскопия массивов биметаллических наночастиц Ag-Au, полученных методом вакуум-термического испарения / Д.Г. Громов, И.В. Мельников, А.И. Савицкий и др. // Письма в журнал технической физики. – 2017. – Т. 43. – Вып. 5. – С. 3-9. DOI:10.21883/PJTF.2017.05.44355.16460.
5. **Cleri, F.** Tight binding potentials for transition metals and alloys / F. Cleri, V. Rosato // Physical Review B. – 1993. – V. 48. – I. 1. – P. 22-33. DOI: 10.1103/PhysRevB.48.22.
6. **Verlet, L.** Computer «experiments» on classical fluids. I. Thermodynamical properties of Lennard-Jones molecules / L. Verlet // Physical Review. – 1967. – V. 159. – I. 1. – P. 98-103. DOI: 10.1103/PhysRev.159.98.
7. **Stukowski, A.** Visualization and analysis of atomistic simulation data with OVITO – the open visualization tool / A. Stukowski // Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering. – 2010. – V. 18. – № 1. – Art. № 015012. – 7 p. DOI: 10.1088/0965-0393/18/1/015012.
8. XMakeMol - A program for visualizing atomic and molecular systems. – Режим доступа: www.url:https://manpages.ubuntu.com/manpages/bionic/man1/xmakemol.1.html. – 15.04.2023.
9. **Башкова, Д.А.** Применение наночастиц серебра в качестве ячеек фазо-изменяемой памяти / Д.А. Башкова, Ю.Я. Гафнер, С.Л. Гафнер, Л.В. Редель // Фундаментальные проблемы современного материаловедения. – 2018. – Т. 15. – № 3. – С. 313-319. DOI: 10.25712/ASTU.1811-1416.2018.03.001.
10. **Gafner, Yu.** Dual structural transition in small nanoparticles of Cu-Au alloy / Yu. Gafner, S. Gafner, L. Redel, I. Zamulin // Journal of Nanoparticle Research. – 2018. – V. 20. – I. 2. – Art. № 51. – 14 p. DOI: 10.1007/s11051-018-4161-2.
11. **Гафнер, Ю.Я.** Анализ распределения по размеру бинарных наночастиц Cu-Au при синтезе из газовой среды / Ю.Я. Гафнер, С.Л. Гафнер, Ж.В. Головенько // Письма о материалах. – 2020. – Т. 10. – № 1. – С. 33-37. DOI: 10.22226/2410-3535-2020-1-33-37.
12. **Chui, Y.H.** Molecular dynamics investigation of the structural and thermodynamic properties of gold nanoclusters of different morphologies / Y.H. Chui, G. Grochola, I.K. Snook, S.P. Russo // Physical Review B. – 2007. – V. 75. – I. 3. – P. 033404-1-033404-4. DOI: 10.1103/PhysRevB.75.033404.

References:

1. Gromov D.G., Dubkov S.V., Savitskiy A.I. et. al. Optimization of nanostructures based on Au, Ag, Au-Ag nanoparticles formed by thermal evaporation in vacuum for SERS applications, *Applied Surface Science*, 2019, vol. 489, pp. 701-707. DOI: 10.1016/j.apsusc.2019.05.286.
2. Ryzhkova D.A., Gafner Yu.Ya. Termicheskaya stabil'nost' stroeniya malykh GTsK-magicheskikh razmerov klasterov serebra s nachal'noj amorfnoy konfiguratsiej [Thermal stability of small fcc-magic size silver clusters structure with the initial amorphous configuration], *Fiziko-himicheskie aspekty izucheniya klasterov, nanostruktur i nanomaterialov [Physical and chemical aspects of the study of clusters, nanostructures and nanomaterials]*, 2020, issue 12, pp. 486-492. DOI: 10.26456/pcascnn/2020.12.486. (In Russian).
3. Retout M., Jabin I., Bruylants G. Synthesis of ultrastable and bioconjugable Ag, Au, and bimetallic Ag-Au nanoparticles coated with calix[4]arenes, *ACS Omega*, 2021, vol. 6, issue 30, pp. 19675-19684. DOI: 10.1021/acsomega.1c02327.
4. Gromov D.G., Mel'nikov I.V., Savitskii A.I. et al. Optical spectroscopy of arrays of bimetallic Ag-Au nanoparticles obtained by vacuum thermal evaporation, *Technical Physics Letters*, 2017, vol. 43, issue 3, pp. 235-237. DOI: 10.1134/S1063785017030087.
5. Cleri F., Rosato V. Tight binding potentials for transition metals and alloys, *Physical Review B*, 1993, vol. 48, issue 1, pp. 22-33. DOI: 10.1103/PhysRevB.48.22.
6. Verlet L. Computer «experiments» on classical fluids. I. Thermodynamical properties of Lennard-Jones molecules, *Physical Review*, 1967, vol. 159, issue 1, pp. 98-103. DOI: 10.1103/PhysRev.159.98.
7. Stukowski A. Visualization and analysis of atomistic simulation data with OVITO – the open visualization tool, *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, 2010, vol. 18, no. 1, art. no. 015012, 7 p. DOI: 10.1088/0965-0393/18/1/015012.
8. XMakeMol - A program for visualizing atomic and molecular systems. Available at: www.url:https://manpages.ubuntu.com/manpages/bionic/man1/xmakemol.1.html.

<https://manpages.ubuntu.com/manpages/bionic/man1/xmakemol.1.html>. (accessed 15.04.2023).

9. Bashkova D.A., Gafner Yu.Ya., Gafner S. L., Redel L. V. Primenenie nanochastits serebra v kachestve yacheek fazo-izmenyaemoj pamyati [Use of silver nanoparticles as the cells of PCM memory], *Fundamental'nye problem sovremennogo materialovedeniya [Fundamental problems of modern materials science]*, 2018, vol. 15, no. 3, pp. 313-319. DOI: 10.25712/ASTU.1811-1416.2018.03.001.

10. Gafner Yu., Gafner S., Redel L., Zamulin I. Dual structural transition in small nanoparticles of Cu-Au alloy, *Journal of Nanoparticle Research*, 2018, vol. 20, issue 2, art.no. 51, 14 p. DOI: 10.1007/s11051-018-4161-2.

11. Gafner Y.Y., Gafner S.L., Golovenko Z.V. Analiz raspredeleniya po razmeru binarnykh nanochastits Cu-Au pri sinteze iz gazovoj sredy [Analysis of the size distribution of binary Cu-Au nanoparticles during synthesis from a gaseous medium], *Pis'ma o materialakh [Materials Letters]*, 2020, vol. 10, no. 1, pp. 33-37. DOI: 10.22226/2410-3535-2020-1-33-37. (In Russian).

12. Chui Y.H., Grochola G., Snook I.K., Russo S.P. Molecular dynamics investigation of the structural and thermodynamic properties of gold nanoclusters of different morphologies, *Physical Review B*, 2007, vol. 75, issue 3, pp. 033404-1-033404-4. DOI: 10.1103/PhysRevB.75.033404.

Original paper

FEATURES OF CRYSTALLIZATION Ag-Au ALLOY NANOCUSTERS

Yu.Ya. Gafner, D.A. Ryzhkova, S.L. Gafner, A.A. Cherepovskaya

Katanov Khakass State University, Abakan, Russia

DOI: 10.26456/pcascnn/2023.15.387

Abstract: In the production of SERS (surface enhanced Raman scattering) substrates, two main approaches to the formation of an array of plasmonic nanoparticles are used: photolithography and chemical methods. Each of them has its own advantages and disadvantages. Vacuum thermal evaporation can also be used. It was chosen for analysis by computer simulation. For this, molecular dynamics simulation of the processes of crystallization of an array of binary *Ag-Au* nanoparticles was used, which makes it possible to smoothly control the plasmon resonance wavelength. Three arrays of *Ag-Au* NPs with a diameter of 2,0; 4,0 and 6,0 nm of various target compositions from *Ag₉₀Au₁₀* to *Ag₅₀Au₅₀* were created. They were subjected to the procedure of cooling from the melt with different rates of the thermal energy removal. In the course of modeling the formation of the internal structure of *Ag-Au* nanoparticles, conclusions were drawn about the dependence of these processes on the target composition, size, and level of thermal exposure. Based on the regularities obtained, adjustments were made to the technological process of creating SERS substrates using binary *Ag-Au* nanoparticles.

Keywords: *nanoclusters, silver, gold, crystallization, structure, computer simulation, tight-binding.*

Гафнер Юрий Яковлевич – д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой математики, физики и информационных технологий ФГБОУ ВО «Хакасский государственный университет им. Н.Ф. Катанова»

Рыжкова Дарья Антоновна – аспирант 3 года обучения, старший преподаватель кафедры математики, физики и информационных технологий ФГБОУ ВО «Хакасский государственный университет им. Н.Ф. Катанова»

Гафнер Светлана Леонидовна – д.ф.-м.н., доцент, профессор кафедры математики, физики и информационных технологий ФГБОУ ВО «Хакасский государственный университет им. Н.Ф. Катанова»

Череповская Арина Александровна, студентка 5-го курса направления подготовки «Математика-Физика» ФГБОУ ВО «Хакасский государственный университет им. Н.Ф. Катанова»

Yury Ya. Gafner – Dr. Sc., Professor, Chief of the Department of Mathematics, Physics and Information Technology, Katanov Khakass State University

Daria A. Ryzhkova – 3rd year postgraduate student, Senior Lecturer of the Department of Mathematics, Physics and Information Technology, Katanov Khakass State University

Svetlana L. Gafner – Dr. Sc., Docent, Professor of the Department of Mathematics, Physics and Information Technology, Katanov Khakass State University

Arina A. Cherepovskaya – 5th year student, Department of Mathematics, Physics and Information Technology, Katanov Khakass State University

Поступила в редакцию/received: 17.04.2023; после рецензирования/revised: 25.05.2023; принята/accepted: 26.05.2023.